8 字结补空间的双曲结构

杜晓明

华南理工大学

2020-12-20

2 维的情形：19 世纪末 20 世纪初

用齐性空间的观点、不用复结构的观点的单值化定理：

定理（单值化定理，Klein-Poincaré-Koebe）

若 S 是可定向的拓扑 2 维流形（即曲面），则除了圆盘与环带的情形之外，S 的内部都必然有完备、有限面积的 2 维齐性空间几何结构。2 维情形下齐性空间的几何结构都是各向同性的，完全被常数曲率决定，而曲率与曲面 S 的 Euler 特征 $\chi(S)$ 有关：

$\chi(S)$	>0	$=0$	<0
几何	S^2	$\mathbb{E}^2$	$\mathbb{H}^2$
曲率	+1	0	-1

注：圆盘与环带的情形也有类似结论，但做不到内部完备且有限面积。

3 维的情形：20 世纪末 21 世纪初

定理（几何化定理，Thurston-Perelman）

若 M 是闭、可定向的拓扑 3 维流形。首先 M 能唯一地通过球面进行连通和分解成不可约的闭 3 维流形。其次不可约的闭 3 维流形能唯一地通过典范的不可压缩环面切开成若干块。最终得到的每一块，或者是闭的流形，或者是带不可压缩环面边界的紧流形。这些块要么可以被圆周或环面所纤维化，要么在内部有完备、有限体积的双曲结构。这意味着每一块必然有以下 8 种齐性空间几何结构之一：

(1) S^3	(2) $\mathbb{E}^3$	(3) $\mathbb{H}^3$	(4) $S^2 \times \mathbb{R}$
(5) $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	(6) $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$	(7) Nil	(8) Sol

8 种几何结构的注记

一些乘积结构的解释：

- S^3 几何：S^3 有 Hopf 纤维化 $S^1 \to S^3 \to S^2$
- $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$ 几何：$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 可以看作 $\mathbb{H}^2$ 上的单位切丛
- Nil 几何：$N =$ nilpotent 的 Lie 群 $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$，$K =$ 子群 $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$，则有 $1 \to K \to N \to H \to 1$，其中 $K \cong \mathbb{R}$，$H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
  （若把 N 中的系数 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{Z}$ 就得到 Heisenberg 群）
- Sol 几何：有纤维化 $T^2 \to M \to S^1$，环面 T^2 上的回复映射是 Anosov 同胚，例如对应于矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 的环面上同胚。

8 种几何结构的注记

- 2 维情形下，双曲几何结构以概率 1 出现。
- 3 维情形下，人们一开始都不敢猜想双曲几何同样以概率 1 出现。原因是 1970 年代之前，人们所知的完备、有限体积的双曲三维流形只有很稀少的几个。然而 Thurston 通过研究 8 字结补空间上的双曲结构，发展出来许多工具，让人们知道的完备有限体积双曲三维流形数量急剧增加。最终人们终于认识到，在三维情形下，双曲几何同样以概率 1 出现！
- 几何化定理中双曲的那些块，许多都有类似于 8 字结补空间的构造方式。

Thurston 是如何想到这 8 种几何结构的？

把高维的流形用低维的流形纤维化：

- 可以被 1 维的圆周纤维化时，底空间是 2 维的，得到 6 种：

底空间的几何	S^2	$\mathbb{E}^2$	$\mathbb{H}^2$
平凡乘积	$S^2 \times \mathbb{R}$ 几何	$\mathbb{E}^3$ 几何	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 几何
扭转乘积	S^3 几何	Nil 几何	$\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$ 几何

- 不能被 1 维圆周纤维化、但是可以 2 维的环面纤维化时，底空间是 1 维圆周。这时是 Sol 几何。
- 最后剩下的，可能可以被欧拉特征为负的曲面纤维化、也可能不可以，然而都有 $\mathbb{H}^3$ 几何。

双曲结构的注记

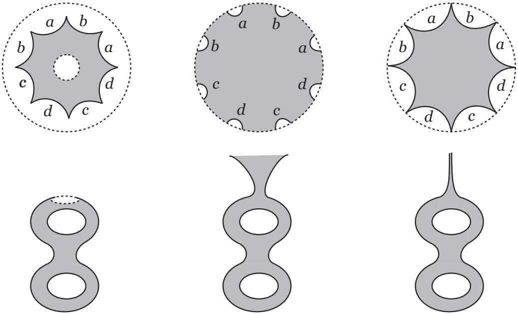
特别注意： 在几何化定理中提到可定向的拓扑流形 M 上的双曲结构时，要加上“在内部”，“完备、有限体积”的条件。

为什么需要强调这个条件？

若 M 是闭的，则内部就是它自己本身，只要它有双曲结构，则该双曲结构必然是完备、有限体积的。若 M 是紧、带边的，则内部是开流形，开流形上能赋予的双曲结构不一定完备，也不一定有限体积。在双曲结构是完备、有限体积的情况之下，存在忠实、离散的群表示 $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$，并且 $\rho(\pi_1(M))$ 成为 $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 中的一个“格”（lattice），从而与数论、模形式等领域发生联系！

双曲结构的注记

例：亏格为 2、带一个边界的定向紧曲面内部的双曲结构：



不完备、
有限面积

完备、
无限面积

完备、
有限面积

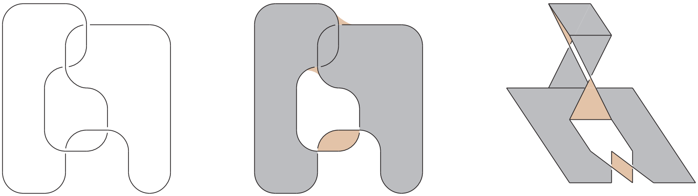
8 字结，记号，预备工具

K : 8 字结，嵌入在 S^3 中、同胚于 S^1

M : $S^3 - K$，（开的）3 维流形

Γ : $\pi_1(M) = \langle a, b \mid a^{-1}bab^{-1}ab = ba^{-1}ba \rangle$

Σ : 以 K 为边界的 Seifert 曲面的内部，同胚于穿孔环面



K Σ Σ

8 字结补空间上双曲结构的发展历程

1. (Riley,Jørgensen,1975) 存在离散、忠实的群表示 $\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$。该方法不具备一般性。
2. (Thurston,1979) M 拓扑同胚于两个去掉顶点的四面体沿各个面粘合，并且可以对这些四面体赋予双曲结构，使得以上粘合方式能给出 M 上的完备有限体积双曲结构。该方法构造出大量的完备有限体积双曲三维流形。
3. (Thurston,1982) 由 pseudo-Anosov 同胚给出的圆周上曲面丛存在完备有限体积双曲结构。拓扑上 M 正好有纤维化 $\Sigma \to M \to S^1$，并且回复映射是 pseudo-Anosov 同胚。该方法再一次证明出 M 上存在完备有限体积双曲结构，并且还能构造出非常广泛的完备有限体积双曲三维流形。

对双曲三维流形的认识的发展历程

基本的问题：1，什么样的三维流形会有完备有限体积的双曲结构？
2，闭双曲三维流形必然长什么样？

1. (Thurston,1979) 绝大多数纽结的（开的）补空间都有完备有限体积的双曲结构，这些纽结称为**双曲纽结**；对双曲纽结补空间作 Dehn 填充得到的绝大多数闭三维流形都有双曲结构。
2. (Thurston,1982) 由 pseudo-Anosov 同胚给出的圆周上曲面丛存在完备有限体积双曲结构。
3. Thurston 猜想（Virtually fibered conjecture）：闭双曲三维流形均存在有限覆盖同胚于由 pseudo-Anosov 同胚给出的圆周上曲面丛。

对双曲三维流形的认识的发展历程

基本的问题：1，什么样的三维流形会有体积有限的完备双曲结构？
2，闭双曲三维流形必然长什么样？

1. (Gromov,1987) 随机群表现给出的群是双曲群的概率是 1。
2. (Perelman,2003) 基本群无限并且不含 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 子群的闭定向不可约三维流形必然有双曲结构。
3. (Agol,Kahn-Markovic,Wise,etc.,2014) Thurston 的 virtually fibered conjecture 是对的！配合上非双曲的情形，即可得到三维流形拓扑结构的一般性结论：任意闭、不可约、无不可压缩环面的三维流形，必然存在有限覆盖可以被维数更低的闭流形所纤维化！

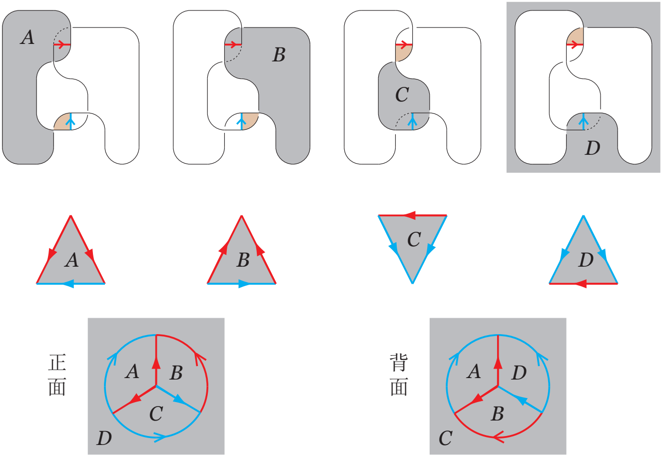
拓扑同胚的刻画

设 M 是拓扑空间，沿着一些子集把 M 切开成 X, Y，切开之后每一块作拓扑同胚形变。形变完之后把原先切开的地方重新粘起来，得到的结果必然还是同胚于原先的 M。用数学语言来说，若

1. $A \subset X$，$B \subset Y$，$f : A \to B$ 是同胚
2. M 存在粘合的刻画方式 $M = X \bigcup_f Y$
3. 存在同胚 $\varphi : (X, A) \to (X_1, A_1)$，$\psi : (Y, B) \to (Y_1, B_1)$
4. 构造同胚 $f_1 : A_1 \to B_1$ 满足 $f_1 \circ \varphi = \psi \circ f$
5. 记粘贴空间为 $M_1 = X_1 \bigcup_{f_1} Y_1$

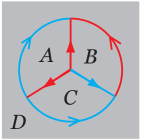
则有 $M \cong M_1$。

把 M 分离成前后两个拓扑球体的四片曲面

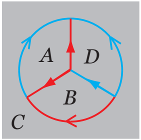


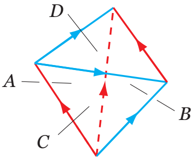
M 同胚于前后两个拓扑球体的表面按照以下方式粘合

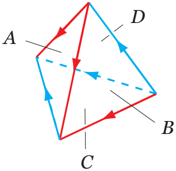
正面



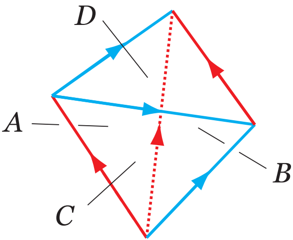
背面

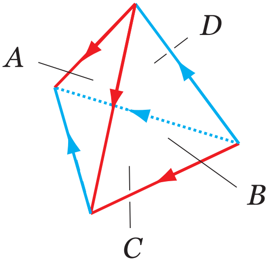






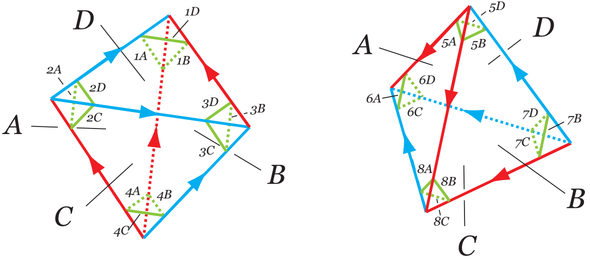
粘合空间中每条边附近的拼接





- 一共有青色、红色 2 条边。
- 每个四面体有 6 个二面角，一共有 12 个二面角
- 围住每条边的分别都有 6 个二面角

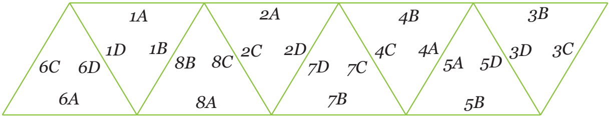
四面体顶点处的 link



$$
\begin{aligned}
&1A = 6A, \quad &2A = 8A, \quad &4A = 5A,\\
&1B = 8B, \quad &3B = 5B, \quad &4B = 7B,\\
&2C = 8C, \quad &3C = 6C, \quad &4C = 7C,\\
&1D = 6D, \quad &2D = 7D, \quad &3D = 5D.
\end{aligned}
$$

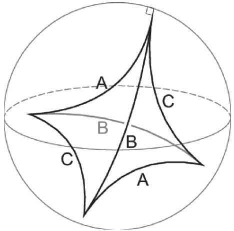
四面体顶点处的 link

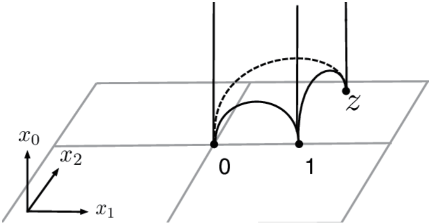
$$\begin{aligned}
&1A = 6A, \quad 2A = 8A, \quad 4A = 5A,\\
&1B = 8B, \quad 3B = 5B, \quad 4B = 7B,\\
&2C = 8C, \quad 3C = 6C, \quad 4C = 7C,\\
&1D = 6D, \quad 2D = 7D, \quad 3D = 5D.
\end{aligned}$$



双曲理想四面体

在 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\cong\partial\mathbb{H}^3$ 上取 4 个点：0、1、z、∞。以它们为顶点在 $\mathbb{H}^3$ 中作双曲理想四面体。各个二面角随 z 而变化。当 $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时，可以验证每个二面角均为 60 度，这样的四面体称为**双曲理想正四面体**。





分析粘合空间上的双曲结构

前面已经证明过：8 字结的补空间 M 拓扑上同胚于两个不含顶点的四面体各个面按照一定的方式粘合。现在反过来，给定两个一般的双曲理想四面体，由于它们也是不含顶点的，对它们的各个面也按上面的方式粘合，粘合结果拓扑上同胚于 8 字结补空间。剩下的问题：两个四面体自身的双曲结构能否整体给出粘合空间上的双曲结构？

- 在双曲理想四面体的内部，自动有双曲结构。
- 位于双曲理想四面体 4 个面内部的那些点上如何？
- 位于双曲理想四面体 6 条边内部的那些点上如何？
- 靠近双曲理想四面体顶点处如何？

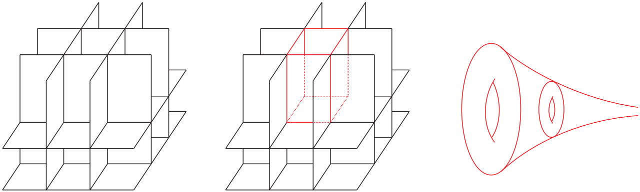
给出完备、有限体积双曲结构的条件

- 位于双曲理想四面体 4 个面内部的那些点处，只要被粘合的两个面是双曲等距的，就可以良定义双曲结构。
- 位于双曲理想四面体 6 条边内部的那些点处，只要粘合时绕着这条边一圈的各个二面角之和是 360 度，就可以良定义双曲结构。
- 靠近双曲理想四面体的顶点处，会跑到无穷远。尽管能跑到无穷远，但是体积有限，于是越远的点处的嵌入半径越小。这样的双曲结构必然有一个有限体积的**“尖端”（cusp）**。

完备、有限体积双曲结构的尖端

定理（Margulis 引理的特殊情形）

非紧的三维流形上如果有完备、有限体积的双曲结构，则会有一个同胚于 $T^2 \times [0, +\infty)$ 的尖端，其中 T^2 是拓扑环面。

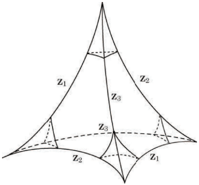


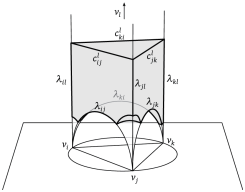
注：Margulis 引理本来是用 Lie 群以及格点的语言陈述的，Thurston 把它用到对完备、有限体积双曲结构的分析中。

双曲理想四面体顶点附近的平坦小三角形

由于双曲理想四面体都是不含顶点的，所以在它的四个顶点附近，可以用等势球面截出小三角形。这些小三角形满足：

- 双曲几何限制在这些小三角形上的得到子流形曲率是平坦的；
- 双曲理想四面体的二面角决定了这些平坦小三角形的三个角度。





靠近理想四面体顶点处能拼出尖端的条件

如果两个双曲理想四面体满足：

- 在各个顶点附近存在用等势球面截出的平坦小三角形，
- 用这些平坦小三角形切出理想四面体顶点附近的部分，
- 拿这些切出的部分能拼出一个同胚于 $T^2 \times [0, +\infty)$ 的双曲尖端，

则在靠近双曲理想四面体的顶点处也能良定义双曲结构。

$T^2 \times [0, +\infty)$ 的双曲尖端在 T^2 的方向是平坦的，这要求上述平坦小三角型能粘出一个平坦环面。

总结给出完备、有限体积的双曲结构的条件

定理（Thurston, 1979)

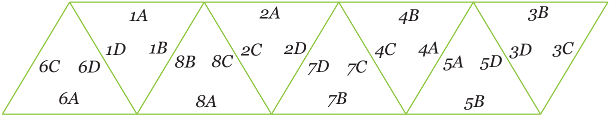
指定了两个双曲理想四面体沿各个面的粘合方式之后，如果在两个双曲理想四面体的每个顶点附近都存在用等势球面截出的平坦小三角形，并且这些小三角形放到平面上粘合时满足以下性质：

1. 每个顶点附近一圈的角度之和是 *360* 度，
2. 粘合得到环面时，需要粘合的边在平面上只相差平移，不相差旋转或比例放缩，

则四面体粘合得到的空间上有整体的完备、有限体积的双曲结构。

8 字结补空间的双曲结构

两个双曲理想四面体都取成双曲理想正四面体时，各个二面角都是 60 度保证了以上两条均满足。



用这两个双曲理想正四面体对整个 $\mathbb{H}^3$ 作出的铺砌（tiling），实际上最早在 1912 年就由 Gieseking 提出，但是没有人把这个铺砌的商空间与 8 字结补空间联系起来。Thusrton 首次发现两者之间的联系，并且还发现它的基本群同构于 $PSL(2, \mathbb{Z}[\omega])$ 的一个指数为 12 的子群（ω 是 3 次单位根，即 $\omega^2+\omega+1=0$）!

如果不取理想正四面体怎么办？

如果取一般的双曲理想四面体，各个二面角不一定是 60 度。这时需要检查粘合方式是否仍然满足以上两条。

1. 如果第一条不满足，则必然不能粘出双曲结构。
2. 如果第二条不满足，则说明由顶点附近的平坦小三角形拼成的环面或者产生皱褶、落在双曲空间上整体不是平的，或者无法封闭，给出的双曲结构不完备。以上这些情况需要作完备化。完备化的过程给出 Dehn 填充，得到的结果是闭的双曲三维流形，拓扑上同胚于先在 S^3 中挖去 K 的一个管状邻域，然后重新粘贴上一个实心环（实心环的腰圆要粘贴成边界环面上另外的简单闭曲线）。

参考资料

1. Thurston 的讲义：《三维流形的几何与拓扑》（Lecture Notes on Geometry and Topology of 3-Manifold，http://library.msri.org/books/gt3m/），第 1、4 章。
2. Jessica Purcell 的课：
   https://www.youtube.com/watch?v=h-9fS2xgXX8
3. Thurston 建立的几何中心制作的科普短视频：Not Knot
   https://www.youtube.com/watch?v=zd_HGjH7QZo
4. 其他的一些网络资源：
   http://kias.dyndns.org/topogeo.html