Teichmüller 空间的等距群：曲面映射类群

杜晓明
华南理工大学数学学院

scxmdu@scut.edu.cn

2020-10-25

回顾：模空间与 Teichmüller 空间

设 S 是亏格至少为 2 的定向闭曲面。

$\{S$ 上的双曲结构$\} = \{S$ 上的共形结构$\} = \{S$ 上的代数簇结构$\} =$ S 的模空间 $\mathcal{M}(S)$

$\{S$ 上被基本群元素记录的双曲结构$\} = \mathrm{Teich}(S)$

当 $\mathrm{Teich}(S)$ 中不同的元素对应于 $\mathcal{M}(S)$ 中同一个元素时，会相差一个记录双曲结构的曲面基本群上的外自同构（内自同构对应于共轭，在定义 Teich(S) 时已经作商过一次）。因此，作为还没有赋予度量的集合之间，有以下关系：$\mathcal{M}(S) = \mathrm{Teich}(S)/\mathrm{Out}^{+}(\pi_1(S))$。后面会看到，这个商的关系在添加上 Teichmüller 度量之后仍然成立。

定义与记号

S_g:	亏格为 g 的定向闭曲面
$\mathrm{Homeo}^+(S_g)$：	S_g 的保定向自同胚群
$\mathrm{Homeo}^\pm(S_g)$：	S_g 的自同胚群（包括保定向与反定向）
$\mathrm{Homeo}_0(S_g)$：	$\mathrm{Homeo}^+(S_g)$ 中恒同映射所在的连通分支
$\mathrm{MCG}(S_g)$：	曲面映射类群 $\mathrm{Homeo}^+(S_g)/\mathrm{Homeo}_0(S_g)$
	有时也记成 $\mathrm{Mod}(S_g)$、Mod_g
$\mathrm{MCG}^\pm(S_g)$：	扩充映射类群 $\mathrm{Homeo}^\pm(S_g)/\mathrm{Homeo}_0(S_g)$

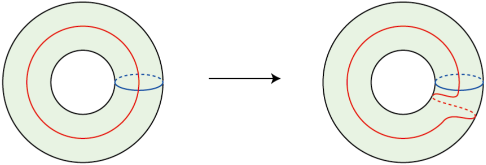
曲面映射类群 $\mathrm{MCG}(S_g)$ 中的元素是曲面保定向自同胚的同伦类。MCG 是 mapping class group 的缩写。

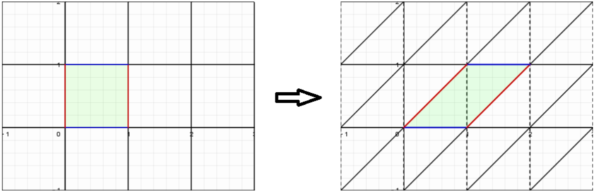
定理（Dehn-Nielsen）

$MCG(S_g) \approx Out^+(\pi_1(S_g))$，$MCG^\pm(S_g) \approx Out(\pi_1(S_g))$

曲面映射类群中的元素的例子

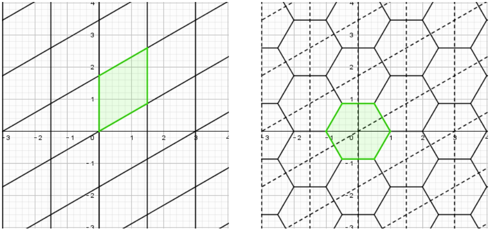
（右手）Dehn 扭转：

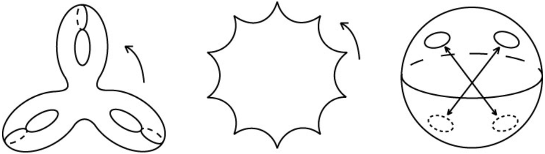




（扩充）曲面映射类群中的元素的例子

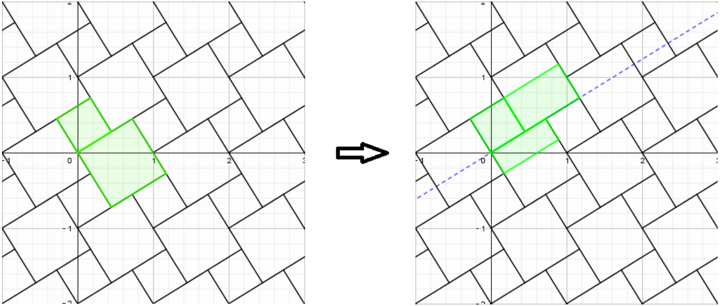
有限阶的同胚类：





（扩充）曲面映射类群中的元素的例子

环面上的 Anosov 同胚，高亏格闭曲面上需要添加奇异点修改成伪-Anosov（pseudo-Anosov）同胚：



$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$$

用曲面映射类群生成新的双曲结构

设 S 是拓扑的曲面，X 是 S 上的加上度量结构之后的曲面，$f: S \to S$ 是拓扑的同胚，则 f 可以诱导出 S 上新的度量结构：

$$d_{f^*X}(p, q) = d_X(f(p), f(q))$$

该度量结构称为 X 在 f 之下的**拉回**。

每一个曲面同胚，都可以从曲面上的其中一个度量拉回到另一个度量。在每一个度量的同伦类中有唯一的双曲代表元，该双曲代表元与原来的度量之间只相差一个同伦。而曲面映射类群的元素正好是曲面同胚的同伦类。因此对曲面映射类群可以良定义出群中每一个元素拉回的新的双曲结构。

曲面映射类群是 Teichmüller 空间的等距群

对于被 Teich(S) 中元素所代表的群表示 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$，被曲面同胚 f 拉回之后的群表示是 $\rho \circ f_\pi^{-1} : \pi_1(S) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$

对于 Teich(S) 中的两个群表示 $\rho_1, \rho_2 : \pi_1(S) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$，它们之间的距离是 $\mathbb{H}^2/\rho_1(\pi_1(S))$ 与 $\mathbb{H}^2/\rho_2(\pi_1(S))$ 之间的映射同伦类中最大伸缩商的下确界。

对于 Teich(S) 中的两个群表示 $\rho_1 \circ f_\pi^{-1}, \rho_2 \circ f_\pi^{-1}$，它们之间的距离是 $\mathbb{H}^2/\rho_1 \circ f_\pi^{-1}(\pi_1(S))$ 与 $\mathbb{H}^2/\rho_2 \circ f_\pi^{-1}(\pi_2(S))$ 之间的映射同伦类中最大伸缩商的下确界。

曲面映射类群与更多数学领域的联系

- 因为 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 单连通并且 $\mathcal{M}(S_g) = \mathrm{Teich}(S_g)/\mathrm{MCG}(S_g)$，所以曲面映射类群 $\mathrm{MCG}(S_g)$ 同构于模空间 $\mathcal{M}(S_g)$ 的基本群
- 在拟等距之下，$\mathrm{MCG}(S_g)$ 的几何反映了 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 的几何
- 三维流形看成带边块的粘合，决定粘合结果的，是边界曲面上的粘合方式，也即曲面映射类群中的元素（例如当两个实心环沿边界粘合时，环面上的映射类给出各种透镜空间）
- 更高维的空间若带有曲面丛结构时，底空间基本群到曲面映射类群的同态共轭类完全决定了从结构（许多代数曲面均有曲面丛结构）

复习：群表现

群表现（group presentation）：$G=\langle S \mid R\rangle=\langle s_1,s_2,\cdots \mid r_1,r_2,\cdots\rangle$，对每个 i，$r_i=s_{j_1}^{\varepsilon_{k_1}}s_{j_2}^{\varepsilon_{k_2}}\cdots s_{j_{l_i}}^{\varepsilon_{k_{l_i}}}$，其中每个 $\varepsilon_{k_s}=\pm 1$

例：$\pi_1(\text{环面})=\langle a,b \mid [a,b]\rangle$，其中 $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$

例：$\pi_1(S_g)=\langle a_1,b_1,\cdots,a_g,b_g \mid r\rangle$，其中 $r=[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]$

每个 s_i 称为生成元（generator），每个 r_i 称为关系子（relator）。
若 G 存在只有有限个生成元的群表现，则称 G 是有限生成的；
若 G 存在只有有限个生成元以及有限个关系子的群表现，则称 G 是有限表现的。

拓扑空间与群的相互对应

$$\text{拓扑空间 } X \underset{?}{\overset{\text{求基本群}}{\rightleftarrows}} \text{群 } G$$

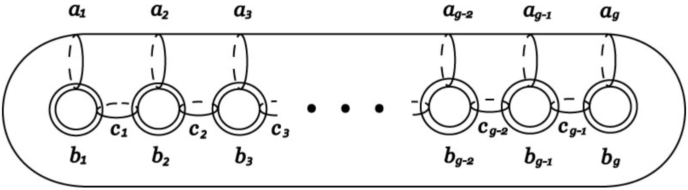
从左到右：求拓扑空间的基本群。

从右到左：取群 G 的一个表现。对每个生成元，构造一条闭道路。取这些道路的一点并。对每一个关系子，构造一个二维胞腔，把该胞腔边缘粘贴到沿着关系子中各个生成元对应的闭道路按照顺序连成的道路上。最终得到复形的基本群正好是 G。

群 G 有限表现 $\Longleftrightarrow$ 用以上方式对 G 构造的复形只有有限个胞腔

MCG(S_g) 的有限生成性

MCG(S_g) 的生成元集	备注
$2g(g-1)$ 个 Dehn 扭转．Dehn, 1938	$g \geq 2$
$3g-1$ 个 Dehn 扭转．Lickorish, 1964	$g \geq 1$
$2g+1$ 个 Dehn 扭转．Humphries, 1979	Dehn 扭转个数最少
两个元素．Wajnryb, 1996	生成元个数最少



利用忠实的群作用证明一个群有限生成的方法

设群 G 忠实作用在集合 X 上。想证明 G 可由子集 S 生成，只需要先在 X 中取定一个元素 x，

(1) 证明 x 的稳定子群 $Stab(x) \subset G$ 可由 S 生成；

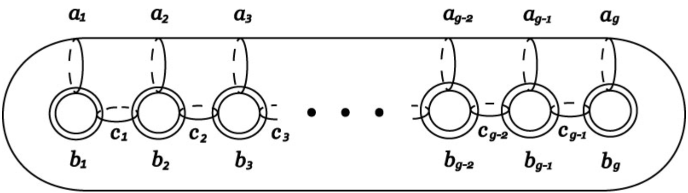
(2) 证明对于 X 上任意一个元素 y，都存在 S 中元素的有限乘积，把 x 送到 y。

目标是证明对 G 中任意的元素 g，g 都可以写成 S 中元素的有限乘积。g 总会把 x 送到某个元素 y。由 (2)，对于 y，存在 S 中元素的有限乘积 u 把 x 送到 y。因此 $g \cdot u^{-1}$ 就会固定住 x，因此 $g \cdot u^{-1}$ 属于 $Stab(x)$。u 以及 $Stab(x)$ 中的元素都可以写成 S 中元素的有限乘积，保证了 g 也可写成 S 中元素的有限乘积。

$\mathrm{MCG}(S_g)$ 作用的复形

利用群 $\mathrm{MCG}(S_g)$ 忠实作用在某个集合 X 上的方法来证明 $\mathrm{MCG}(S_g)$ 有限生成。X 取成 { 曲面上的简单闭曲线 }。

$Stab(x)$ 相当于把 S_g 沿着简单闭曲线 x 切开的曲面上的映射类群再添加上互换两个切开新边界的映射类。切开的曲面亏格数降低 1，因此可以对亏格作归纳来证明 $\mathrm{MCG}(S_g)$ 的有限生成性。



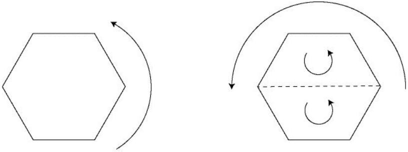
只用两个有限阶元素生成

Korkmaz, 2004		D., 2019	
$\mathrm{MCG}(S_g)$	两个生成元阶数	$\mathrm{MCG}^{\pm}(S_g)$	两个生成元阶数
$g=1$	$\langle 4,6\rangle$	$g=1$	不可能
$g=2$	$\langle 6,10\rangle$	$g=2$	未解决
$g\geq 3$	$\langle 4g+2,4g+2\rangle$	$g\geq 3$	$\langle 2,4g+2\rangle$

在上面的表格中，$\langle m_1,m_2\rangle$ 意味着可以用两个阶数分别为 m_1 与 m_2 的元素生成整个群。

$\mathrm{MCG}(S_1) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$

环面可以看成是正六边形对边粘合的结果。



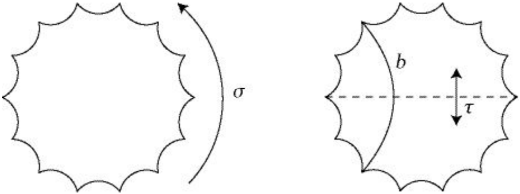
σ_1:order 6 σ_2:order 4

σ_1：把正六边形旋转 $\pi/3$

σ_2：切开成两个四边形，形变成正方形，每个旋转 $\pi/2$，再整体旋转 π，这些操作保持各边粘合模式

$\mathrm{MCG}^{\pm}(S_g) = \langle \sigma, \tau \circ T_b \rangle \ (g \geq 3)$

扩充映射类群由两个有限阶元素组成的生成元集：



σ：把正 $4g+2$ 边形旋转 $\pi/(2g+1)$

τ：把正 $4g+2$ 边形沿着对称轴反射

T_b：沿着图中被 τ 固定住的曲线 b 的 Dehn 扭转

MCG(S_g) 的有限表现性

McCool, 1975	Aut(F_n) 有限表现，方法纯代数，不能导出显式的有限表现
Hatcher-Thurston, 1980	构造出 MCG(S_g) 作用在上面的复形，证明 MCG(S_g) 存在显式的有限表现
Wajnryb, 1983	用 Humphries 的 $2g+1$ 个 Dehn 扭转生成元写出显式的有限群表现

若短正合序列

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 1$$

中 K 有限生成、H 有限表现，则 G 有限表现。

证明思路：

K, H 均有限生成，于是 G 有限生成。H 中的有限个关系提升到 G 中，给出 G 中的有限个关系，关系等式的右端是 H 的关系中的生成元提升到 G 中的像的乘积，左端是 K 中的生成元嵌入到 G 中的像的乘积。这些关系给出 G 中的全部关系。

空间上等距作用的平移长度

设 f 是度量空间 (X, d) 上的等距变换，记

$$\tau(f) = \inf_{x \in X} \{d(x, f(x))\}$$

$\tau(f)$ 称为 f 的**平移长度**（**translation length**）。

注：下确界不一定能被 X 上的点 x 取到。

分类定理（版本一：群在空间上等距作用版本）

设 G 等距地作用在度量空间 (X, d) 上，则群 G 的元素 f 可分成三类：

(1) $\tau(f)$ 不能被 X 上任意点取到；

(2) $\tau(f)$ 能被 X 上某一点取到并且 $\tau(f) = 0$；

(3) $\tau(f)$ 能被 X 上某一点取到并且 $\tau(f) > 0$。

Nielsen-Thurston 定理的 Bers 证明，就是让 G 和 X 分别取成 $\mathrm{MCG}(S_g)$ 和 $\mathrm{Teich}(S_g)$，再取 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 上的 Teichmüller 度量，根据上面的情形作出完整分类，并且进一步刻画出以上三类群元素的作用的更多几何性质。

分类定理（版本二：映射类群元素版本）

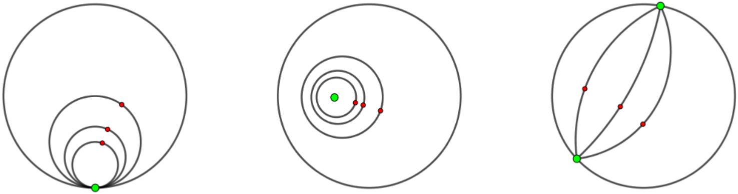
定理（Nielsen-Thurston）：设 f 属于 $\mathrm{MCG}(S_g)$，则 f 可以分成三类：

(1) （可约）存在曲面上一个由有限条彼此不相交的简单闭曲线同痕类组成的集合 C，f 固定住 C（集合意义下的固定，允许置换 C 中的元素），并且 f 的阶数无限。

(2) （周期）f 是 $\mathrm{MCG}(S_g)$ 中的有限阶元素。

(3) （伪-Anosov）f 会固定住 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 中的一条测地线（集合意义下的固定），f 限制在这条测地线上的作用是每个点都平移了 $\tau(f)$。此时存在拓扑曲面上的两组相互横截并且带横截测度的叶状结构 $(\mathcal{F}^u, \mu_u)$、$(\mathcal{F}^s, \mu_s)$，存在 $\lambda > 1$，并且在 f 的同痕类中存在一个映射 ϕ，使得 $\phi(\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu_u)$，$\phi(\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \frac{1}{\lambda} \cdot \mu_s)$。

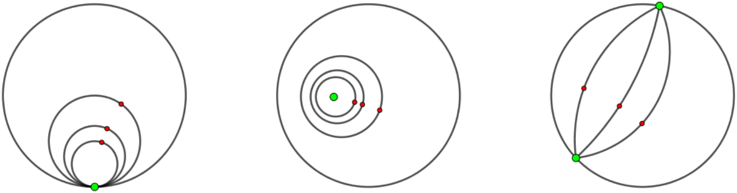
与 Möbius 变换分类的类比



群 G（$\mathrm{MCG}(S_g)$、$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$）等距地作用在空间 X（$\mathrm{Teich}(S_g)$、$\mathbb{H}^2$）上时，对 G 中的元素 g 的分类：

$\mathrm{MCG}(S_g)$	$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$	几何性质
可约	抛物型	固定住 X 无穷远边界上一点
周期	椭圆型	存在 X 内部一点 x 使 $g \cdot x = x$
伪-Anosov	双曲型	g 沿着 X 中一条测地线向前推

不动点的几何意义



MCG(S_g) 等距地作用在 Teich(S_g) 的 Thurston 紧化上，

元素类型	不动点的几何意义
可约	退化的复结构，Deligne-Mumford 紧化
周期	存在某种对称的复结构
伪-Anosov	退化的复结构，全纯二次微分的叶状结构