辨认曲面形状的工具：Teichmüller 空间

杜晓明
华南理工大学数学学院

scxmdu@scut.edu.cn

2020-10-24

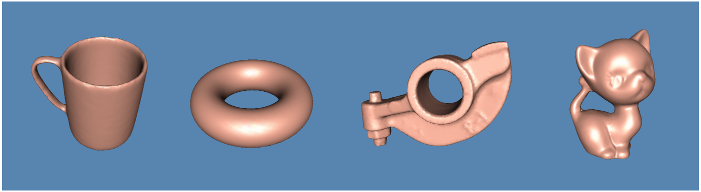
非常感谢顾老师的邀请!

我自己的研究方向

曲面映射类群（曲面自同胚的同伦类所构成的群），这个群与 Teichmüller 空间紧密相关，而 Teichmüller 空间是计算共形几何中的核心概念之一。

曲面映射类群是纯拓扑的对象，Teichmüller 空间是几何的对象。拓扑与几何的相互作用是几何拓扑的中心主题。

基本的问题



问题 1：如何辨认一张曲面的“形状”？

问题 2：给定拓扑相同的两张曲面，如何衡量它们“形状相差多远”？

何谓“曲面的形状”、“两个形状之间的差距”？记录曲面形状信息的工具有：嵌入在三维空间的形状信息，内蕴的度量结构。微分几何上的信息如何用方便计算机表达的方式呈现出来？

度量结构与共形结构

看待度量结构的一种观点：对曲面上的道路给出长度的指定。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{曲面上的}\\ \text{度量结构}\end{array}\right\} \text{“}\leftrightarrow\text{”} \left\{\begin{array}{c}\text{满足“某些条件”的}\\ \Phi:\{\text{曲面上的道路}\}\to\mathbb{R}_+\end{array}\right\}$$

由余弦定理，光滑度量结构除了指定长度之外，还指定了无穷小三角形的角度。若曲面上任意两条相交曲线的相交角度可良定义，则对角度的指定是度量结构所包含信息的其中一部分。提取出这部分信息，成为共形结构。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{曲面上的}\\ \text{共形结构}\end{array}\right\} \text{“}\leftrightarrow\text{”} \left\{\begin{array}{c}\text{满足“某些条件”的对曲面上任意两条}\\ \text{相交曲线的相交角度的一种指定方式}\end{array}\right\}$$

曲面上各个层次的几何结构

回顾曲面上的底层结构的定义，都是一族开集 $\{U_\alpha\}$，满足：

- $\{U_\alpha\}$ 覆盖了曲面；
- 对每个指标 α 均有连续的同胚 $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^2/\mathbb{C}$；
- $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ 是平面子集之间的“某种”映射。

“某种”映射取成“连续/分片线性/可微/保角/有理”映射时，这一族局部坐标 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 就对应着曲面上的“拓扑/分片线性/微分/共形/代数簇”结构。定义这些结构的原始动机，是想说明什么是曲面上的“连续/分片线性/可微/全纯/代数”函数。

曲面上各个层次的几何结构

(1) 拓扑结构　(2) 微分结构　(3) 辛结构
(4) 共形结构　(5) 黎曼度量结构　(6) 双曲结构
(7) 复多元多项式方程组的零点集合结构

从定义上看，在强弱关系方面，有：

$(1) < (2) < (3) < (4) < (5) < (6)$, $(4) < (7)$

越强的几何结构，包含的信息越多，越具备刚性，但是满足条件的集合越小。越弱的几何结构，则适用范围越广。共形结构是连接各种结构的一个重要桥梁！利用共形结构甚至可以证明在一定条件下以上有些几何结构之间是等价的。

一些工具所在的层次

拓扑结构：连续，同伦，基本群，覆盖空间，同调，上同调

微分结构：切向量场，纤维丛，微分形式，de Rham 上同调

黎曼度量结构：调和映射，Hodge 分解，联络，活动标架，测地线，曲率，等温坐标

等温坐标把黎曼度量结构与共形结构联系了起来，使得在弱一些的共形结构上同样会有调和函数的概念[1]！

[1]注：对于曲面上的调和函数，只需要定义域曲面上的共形结构、不需要黎曼度量结构。但是对于曲面之间的调和映射，还需要用到目标曲面上的共形因子，因此光是共形结构不够，仍需要目标曲面上的黎曼度量结构。

一般流形上各个层次的几何结构的关系

(1) 拓扑结构	(2) 微分结构	(3) 辛结构
(4) 复结构	(5) 黎曼度量结构	(6) 双曲结构
(7) 代数簇结构		

(1) 与 (2) 之间：Milnor、Freedman、Donaldson（分别是 1964、1986、1986 年菲尔兹奖得主）的工作

(4) 与 (5) 之间：Gauss-陈省身的等温坐标、Ricci 流

(4) 与 (7) 之间：Weierstrass、周炜良、小平邦彦（1954 年菲尔兹奖得主）的工作

基本问题的提炼

问题 1：给定一张带黎曼度量的曲面，如何辨认出该黎曼度量背后的共形结构？

问题 2：给定两张带黎曼度量曲面，如何衡量它们的黎曼度量背后的共形结构之间相差有多远？

由于曲面的共形结构与双曲结构相互等价，我们后面将在共形结构与双曲结构之间自由地切换。有些工具在共形结构的框架下讨论比较方便，有些工具则在双曲结构的框架下讨论比较方便。

看待双曲结构的观点

带双曲结构的曲面上，闭曲线都可以自由同伦成一条长度最短的闭测地线。看待双曲结构的一种观点：对曲面上任意闭道路自由同伦类都给出长度的指定。

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{曲面上的} \\ \text{双曲结构} \end{array} \right\} \text{“} \leftrightarrow \text{”} \left\{ \begin{array}{c} \text{满足“某些条件”的 } \Phi : \\ \{\text{曲面上闭道路的自由同伦类}\} \to \mathbb{R}_+ \end{array} \right\}$$

定理

对于定向闭曲面 S，存在有限条在拓扑意义下的简单闭曲线，对它们的自由同伦类所指定的长度能完全决定曲面的双曲结构。

被曲面基本群中元素记录的双曲结构

在拓扑曲面 S 上赋予双曲结构之后，记带双曲结构的曲面为 X，则 X 可作为 $\pi_1(S)$ 等距作用在双曲平面上所得的商空间。

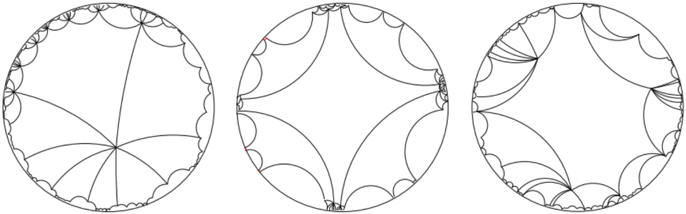
$$
\left\{ \begin{array}{c} \text{被曲面基本群元素} \\ \text{记录的双曲结构} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{离散、单的同态} \\ \rho : \pi_1(S) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \end{array} \right\} / \sim
$$

$$
\mathscr{X} \leftrightarrow \mathbb{H}^2/\rho(\pi_1(S))
$$

$$
\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \exists\, A \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2),\ \forall\, a \in \pi_1(S),\ \rho_2(a) = A \circ \rho_1(a) \circ A^{-1}
$$

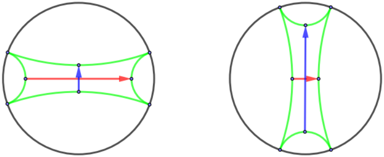
以上定义的集合称为 **Teichmüller 空间**，记作 Teich(S)。

Teichmüller 空间中元素的例子



设 S 是亏格为 2 的定向闭曲面。几个不同的群表示 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 : \pi_1(S) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ 对应的群作用基本区域。它们彼此不共轭，代表了 Teich(S) 中不同的点 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \mathscr{X}_3$。

“被基本群元素记录”意味着什么？



穿孔环面上的以上两种双曲结构，从形状上看是相同的，但是基本群中两个具体元素记录的长度并不相同。在双曲结构上，它们俩相同；但是在基本群元素记录的双曲结构上，它们不同。

$\{S$ 上的双曲结构$\} = S$ 的模空间 $\mathcal{M}(S)$

$\{S$ 上被基本群元素记录的双曲结构$\} = \mathrm{Teich}(S)$

$\mathcal{M}(S) = \mathrm{Teich}(S)/\mathrm{Out}^{+}(\pi_1(S)) = \mathrm{Teich}(S)/\mathrm{MCG}(S)$

Teichmüller 空间中的距离

假设 $\mathscr{X}_1 = \mathbb{H}^2/\rho_1(\pi_1(S)), \mathscr{X}_2 = \mathbb{H}^2/\rho_2(\pi_1(S))$ 是两个被曲面基本群元素记录的双曲结构，希望用它们之间的形变量（准确来说是伸缩商）作为它们之间距离的定义。

1. 先利用记录双曲结构的基本群标记，构造一个拓扑上的同胚 $f: \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$，使得 f 在基本群上诱导的是恒同同构。
2. 利用 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 这两个附加在拓扑结构之上的双曲结构，计算拓扑上的映射 f 在这两个双曲结构下的最大伸缩商。
3. 让 f 同伦地形变，计算同伦类中最大伸缩商的下确界，利用该下确界定义出 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 这两个双曲结构之间的距离。

伸缩商的计算

定义 (带度量的曲面之间的光滑映射在一点处的伸缩商)

设 X、Y 是带度量的曲面，$h: X \to Y$ 是光滑同胚。对 $p \in X$，$S_p(r) = \{q \in X : d_X(p, q) = r\}$，定义局部伸缩商

$$K_p(h) = \lim_{r \to 0+} \frac{\sup\{d_Y(h(p), h(q)) : q \in S_p(r)\}}{\inf\{d_Y(h(p), h(q)) : q \in S_p(r)\}}$$

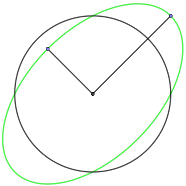
注：$K_p(h)$ 反映的是 h 在 p 处距离一个共形变换有多远。

定义 (带度量的曲面之间的光滑映射的最大伸缩商)

设 X、Y 是带度量的曲面，$h: X \to Y$ 如前。定义

$$K(h) = \sup\{K_p(h) : p \in X\}$$

伸缩商的几何解释



注：尽管伸缩商的定义要用到度量结构，但是实际上它只依赖于角度的变化，因此只需要 X 与 Y 背后的共形结构即可定义出伸缩商。在理论证明中，用共形结构（以复数为工具）表达的伸缩商更有效。

Teichmüller 度量

定义 (两个被曲面基本群记录的双曲结构之间的距离)

设 S 是拓扑曲面，$\mathscr{X}_1$、$\mathscr{X}_2$ 是 S 上两个被基本群元素记录的双曲度量结构，$h : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$ 在拓扑上诱导了曲面基本群上的恒同映射，$K(f)$ 为映射 f 的最大伸缩商。定义

$$d_{Teich}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2) = \frac{1}{2} \inf \left\{ \log K(f) \;\middle|\; f \text{ 同伦于 } h \right\}$$

为这两个被基本群元素记录的双曲度量结构之间的距离。

Teichmüller 空间上的这个度量称为 **Teichmüller 度量**。

注：$\mathscr{X}_1$、$\mathscr{X}_2$ 相同时显然它们之间距离为零。

细节上的问题

- 局部伸缩商的定义要依赖于映射的可微性，但是同伦类中的映射不一定可微，如何解决该问题？（拟共形映射）
- 在同伦类中让映射的最大伸缩商达到下确界时，该下确界能否被具体的同胚实现？（Teichmüller 定理）
- 若刚好能够实现，该同胚长成什么样子？（Teichmüller 映射、带横截测度的叶状结构、全纯二次微分）
- 这样定义出来的两个双曲结构之间的距离，是否满足三角不等式、对称性等条件？

拟共形映射

问题：局部伸缩商的定义要依赖于同胚的可微性，但是同伦类中的映射不一定可微，需要计算的确界在可微同胚的同伦类中也不一定能够取到，如何解决这些问题？

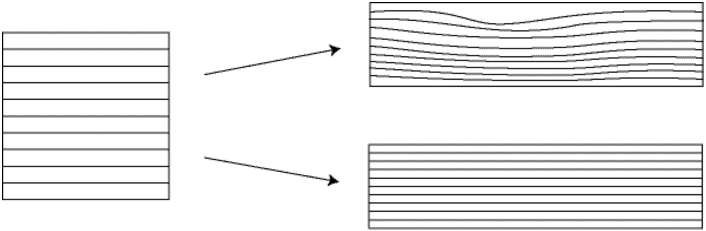
解决办法：Ahlfors 扩大了同伦的可微同胚所在的集合：

$$\{\text{可微同胚}\} \to \{\text{拟共形同胚}\}$$

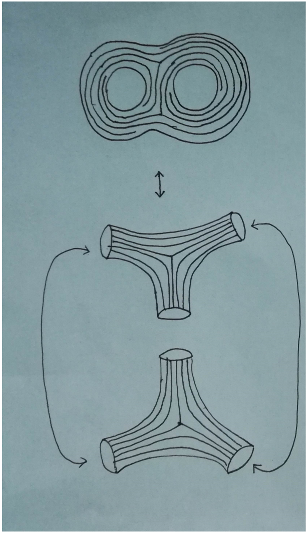
前一个集合不是列紧的，但后一个集合是列紧的，在拟共形同胚上定义出广义的伸缩商之后，就能够取到最大伸缩商的下确界。Ahlfors 证明了实现这个下确界的同胚除了有限个点不可微之外其他点都可微。

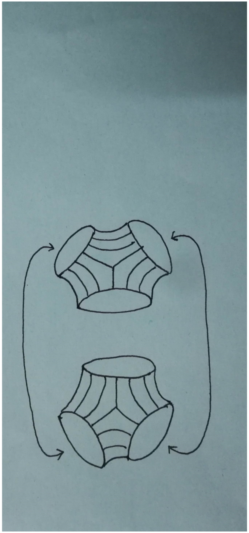
（该方法有点像解 PDE 时先在更大广义函数空间中求弱解）。

实现最大伸缩商最小化的同胚



实现最大伸缩商最小化的同胚：闭曲面情形的例子





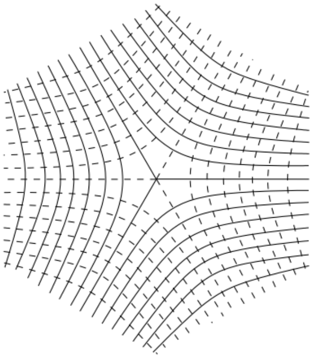
全纯一次微分 v.s. 全纯二次微分 v.s. 叶状结构

$$\left\{\begin{array}{c}\text{全纯一次微分}\\ \omega = f(z)dz\end{array}\right\} \text{“}\leftrightarrow\text{”} \left\{\begin{array}{c}\text{满足“某些条件”的映射：}\\ \{\text{曲面上的带方向道路}\} \to \mathbb{C},\\ \gamma \mapsto \omega(\gamma) = \int_0^1 f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{全纯二次微分}\\ q = f(z)dz \otimes dz\end{array}\right\} \text{“}\leftrightarrow\text{”} \left\{\begin{array}{c}\text{满足“某些条件”的映射：}\\ \{\text{曲面上的不带方向道路}\} \to \mathbb{C},\\ \gamma \mapsto q(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2}dt\end{array}\right\}$$

- 叶状结构 $\mathcal{F}_u$：过点 p_1 的叶片 $= \{$ 点 $p_2 \mid$ 存在道路 γ 连接 p_1, p_2 且 $q(\gamma)$ 虚部为 0 $\}$；$\mathcal{F}_u$ 的奇异点（或分支点）= 全纯二次微分的零点；γ 在 $\mathcal{F}_u$ 下的横截测度 $= q(\gamma)$ 的虚部的绝对值。
- 与 $\mathcal{F}_u$ 正交的另一个叶状结构 $\mathcal{F}_s$：把上面的虚部换成实部。
- 共形结构沿这两个叶状结构的形变：$\mathcal{F}_u$ 方向拉伸+$\mathcal{F}_s$ 方向收缩。

例：$q = z\,\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$ 对应的叶状结构



沿着 $\gamma(t) = e^{\alpha i} t$ 使 $\int_0^1 \sqrt{f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2} dt$ 虚部为零 $\Rightarrow \alpha = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$。

沿着 $\gamma(t) = e^{\alpha i} t$ 使 $\int_0^1 \sqrt{f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2} dt$ 实部为零 $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$。

二次微分与 2-形式、一次微分的差别体现在哪里？

二次微分在一点处是直接作张量积 $dz \otimes dz$，2-形式在一点处是张量积的反对称线性组合 $dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2}(dz \otimes d\bar{z} - d\bar{z} \otimes dz)$。

全纯一次微分 ω 在道路每一点处的切向量上的作用是：
$\langle \omega, (\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle = \langle f(z)dz, (\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle = f(\gamma(t))\gamma'(t)$，
ω 在整条道路上的作用即对每一点处的作用求积分，全纯性保证作用量在道路的定端同伦之下不变。

全纯二次微分 q 在道路每一点处的切向量上的作用是：
$\langle q, (\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle = \langle f(z)dz \otimes dz, (\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle = f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2$，
q 在整条道路上的作用即对每一点处的作用求积分。但为了使积分值在不经过奇点的道路定端同伦之下不变，需要开根再作积分。开根可能会导致不是良定义，结果相差一个正负号。但是横截测度的定义是取绝对值，不受影响。

为什么用一次微分不行、需要用二次微分？

最终目标是为了让共形结构形变。类似于让度量结构形变。

- 度量结构满足对称性。对于连接两点 p_1, p_2 的测地线段 γ，计算长度时不需要事先对 γ 取定方向。即不管 γ 是从 p_1 到 p_2 还是反过来从 p_2 到 p_1，度量结构给出作用量都相同。
- 一次微分作用在道路 γ 上的值依赖于 γ 的方向的选取，当 γ 取反方向时，作用量会相差一个负号。
- 二次微分作用在道路 γ 上的值不依赖于 γ 的方向的选取，求作用量时乘的 $(\gamma'(t))^2$ 会抵消掉负号带来的影响。因此度量在共形结构下的类比物应该是二次微分。

设 S_g 为亏格为 g 的定向闭曲面。对于拓扑曲面 S_g 上的两个被基本群记录的双曲结构 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$，存在唯一的映射 $f : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$，使得：

(1) 从拓扑结构的角度，f 在 $\pi_1(S_g)$ 上诱导的同态是恒同同态。

(2) 考虑双曲结构之后，f 只在有限个点上不可微，在可微点处的最大伸缩商取到同伦类中的下确界，并且处处伸缩商相等。

(3) 在 $\mathscr{X}_1$ 上存在两族相互正交的叶状结构 $\mathcal{F}_1^s, \mathcal{F}_1^u$（正交意味着有相同的奇点），在 $\mathscr{X}_2$ 上也存在两族相互正交的叶状结构 $\mathcal{F}_2^s, \mathcal{F}_2^u$。

(4) f 把 $\mathcal{F}_1^s$ 的奇点映成 $\mathcal{F}_2^s$ 的奇点，把 $\mathcal{F}_1^s$ 的叶片映成 $\mathcal{F}_2^s$ 的叶片，把 $\mathcal{F}_1^u$ 的叶片映成 $\mathcal{F}_2^u$ 的叶片。

(5) 在不包含奇点的局部邻域中，在 $\mathcal{F}_1^u, \mathcal{F}_1^s, \mathcal{F}_2^u, \mathcal{F}_2^s$ 的横截测度给出的坐标下，f 可以表示成 $(x, y) \mapsto (\sqrt{K}x, \frac{1}{\sqrt{K}}y)$，$K$ 为伸缩商。

以上映射称为 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 之间的 **Teichmüller 映射**。

Teichmüller 映射：

同一个拓扑曲面的两个双曲结构（共形结构）之间的映射，使得在基本群上诱导的同态是恒同、并且最大伸缩商取到下确界。该映射使角度的畸变最小。

调和映射：

同一个拓扑曲面的两个不同的黎曼度量结构之间的映射，满足在基本群上诱导的同态是恒同、并且调和能量取到下确界。该映射使形变的能量最小。

Teichmüller 映射 v.s. 调和映射：泛函的观点

求解 Teichmüller 映射：
在可微映射按照伸缩商的 L^∞ 范数完备化之后得到的空间中，求解满足以下条件的映射：在基本群上诱导的同态是恒同、并且使得伸缩商的 sup 泛函达到下确界的映射。利用该下确界可以定义两个共形结构之间的距离。

求解调和映射：
在可微映射按照梯度的 L^2 范数完备化之后得到的空间中，求解满足以下条件的映射：在基本群上诱导的同态是恒同、并且使得调和能量泛函达到下确界。利用该下确界可以定义两个黎曼度量结构之间的距离。

Teichmüller 映射 v.s. 调和映射：一维带边区域简化版本

对于两个一维区间 $[a, b]$ 和 $[A, B]$，

Teichmüller 映射：
在绝对连续函数的空间中使得推广的 $\sup_{x\in[a,b]} \{|f'(x)|\}$ 达到最小的映射 $f : [a, b] \to [A, B]$

调和映射：
在 Sobolev 空间中使得推广的 $\int_a^b |f'(x)|^2 \, dx$ 达到最小的映射 $f : [a, b] \to [A, B]$

在一维的情形下以上两种映射均为线性映射。